Czy zasada nieoznaczoności Heisenberga jest spełniona dla dowolnej funkcji falowej?

Janusz Szczęchor

1 Czy funkcja falowa stanu 1s jest unormowana?

Aby to wykazać należy obliczyć kwadrat jej normy (kwadrat długości wektora stanu), obliczenia będą prowadzone we współrzędnych sferycznych.

$$|\Psi|^2 = \int \Psi^* \Psi dV = \int \Psi^*(r,\theta,\phi)\Psi(r,\theta,\phi) r^2 dr\, d\phi\, sin\theta d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi sin\theta d\theta = \frac{\Gamma(3)}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 = 1$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \int sinx dx = -cosx + C, \int_0^\pi sin\theta d\theta = -cos\theta \Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

$$\frac{2r}{a_0} = x, \frac{2dr}{a_0} = dx, \int_0^\infty \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 dr = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{\Gamma(3)}{8\pi}$$

1. Podzielenie nieskończoności przez stałą wartość nie zmienia granicy całki.
2. Całka $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = \Gamma(a)$, to całka Eulera II rodzaju, §530 (G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy Tom II*, PWN, Warszawa 1978).
3. Funkcja gamma ma własności: $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$,$\Gamma(1) = 1$.

W ten sposób wykazaliśmy, że stan 1s o tej postaci funkcjonalnej jest rzeczywiście unormowany.